

Анализ термонапряженного состояния однослойной оболочки для литья по выплавляемым моделям

Станислав Леонидович Зеленков,
Украина. Директор учебно-производственного центра "Академия Ювелирного Искусства"

Stanislav L. Zelenkov
Education Production Centre
"Jewelry Art Academy"
General Director
E-mail: jeweller_design@mail.ru

Николай Иванович Замятин,
Украина. Преподаватель художественного и ювелирного литья учебно-производственного центра "Академия Ювелирного Искусства"

Для характеристики термонапряженного состояния однослойной оболочки в момент заливки и кристаллизации отливки рассмотрим характерные условия возникновения термических напряжений.

Представим, что оболочка по конфигурации представляет полый цилиндр с внешним радиусом "а" и внутренним "в". В соответствии с теорией тепловых процессов температурное поле будет определяться геометрическими размерами оболочки, ее теплофизическими свойствами и величиной контактной температуры, T_k . Температура внешней среды, T_c , является известной функцией и принимается постоянной. Контактную температуру, T_k определяем из уравнения Фурье через интеграл ошибок Гаусса:

$$\frac{T_k - T_n}{T_n - T_{зал}} = 1 - erf \frac{x}{2\sqrt{a\tau}},$$

где T_n – начальная температура оболочки,

$T_{зал}$ – температура заливки,

x – координата точки оболочки,

a – коэффициент температуропроводности,

τ – промежуток времени, с.

Температурное поле оболочки записывается известным уравнением

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

Условия на поверхности оболочки:

$$T(r) = T_{конт} \text{ при } r = a;$$

$T(r) = T_{нач}$ при $r = b$.

Уравнение теплопроводности (1) удовлетворяет условия на поверхности оболочки:

$$T(r) = T_{конт} - (T_{конт} - T_{нач}) \frac{\ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{a}{b}}, \quad (2).$$

В связи с неравномерным нагревом по толщине оболочки возникают термические напряжения. Если принять, что оболочка свободна от механических нагрузок и пренебрегая влиянием торцов, можно считать, что все сечение оболочки, перпендикулярные к ее оси, остаются плоскими и работают в одинаковых условиях. Таким образом, радиальное перемещение "U" любой формы зависит только от "r": перемещение в окружном направлении V для цилиндрической формы принимаем равным нулю; относительное удлинение по направлению оси Z (рис. 1).

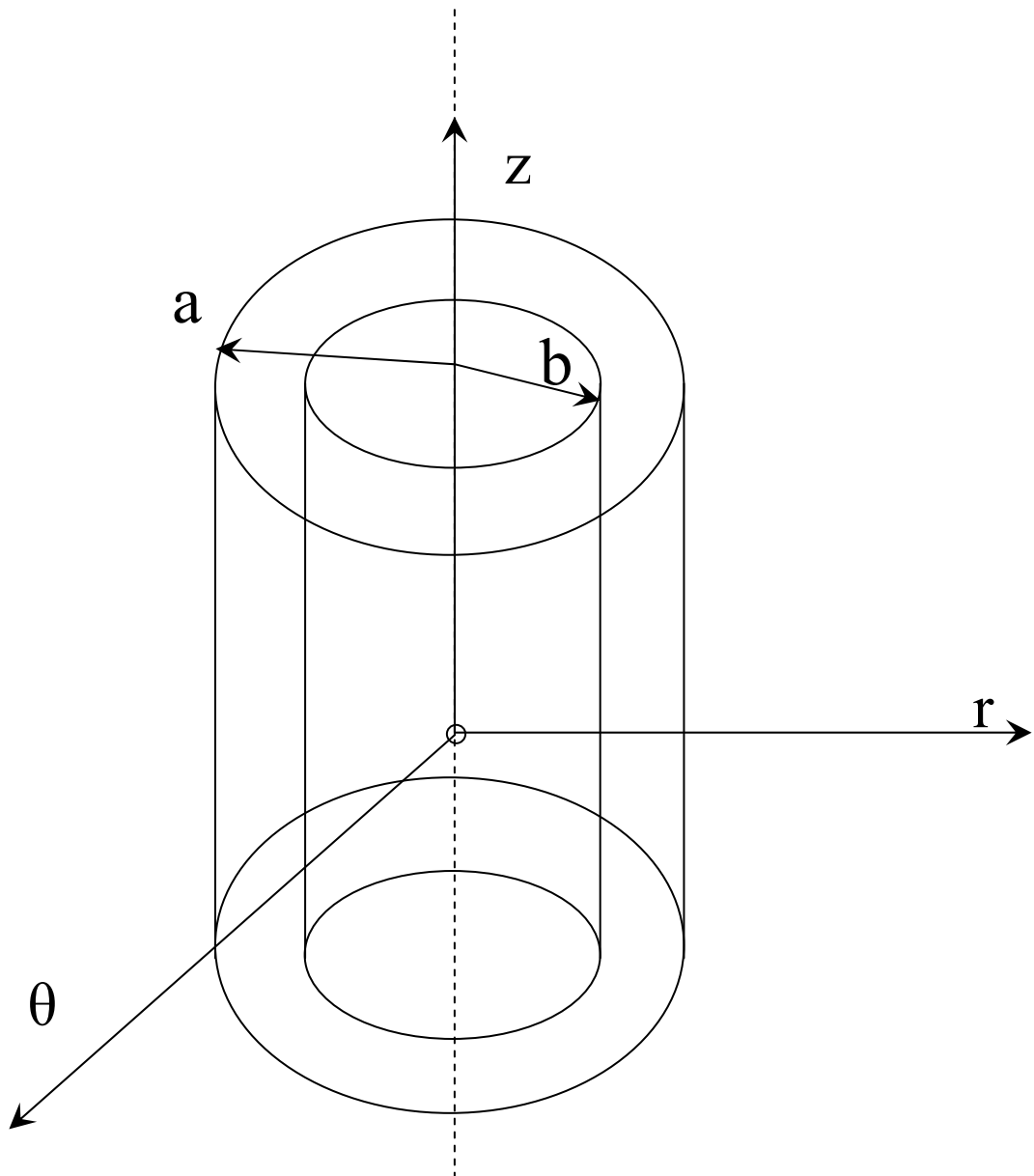


Рис. 1 Схема расчета термонапряжений

Для плоской деформации геометрическими уравнениями, связывающими деформации с перемещением, являются:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{d\omega}{dz} = \text{const} = d \quad (3)$$

Деформация сдвига рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\vartheta}{r} \quad (4)$$

В случае $\nu=0$ перемещение "U" не зависит от угла θ . Следовательно, $\varepsilon_{r\theta}=0$. Этим деформациям будут соответствовать такие компоненты напряжений: σ_{rr} – нормальные радиальные напряжения; $\sigma_{\theta\theta}$ – нормальные радиальные (тангенциальные) напряжения; σ_{zz} – нормальные осевые напряжения. Так как $\varepsilon_{r\theta}=0$, то касательные напряжения равны нулю при осесимметричном температурном поле (2).

Уравнение равновесия элемента оболочки можно записать:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0; \quad \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = 0 \quad (5)$$

Исключение из геометрических уравнений (3) радиального перемещения U(r) приводит к следующему уравнению совместности деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr} + \frac{1}{r}(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}) = 0 \quad (6)$$

Двух уравнений (5 и 6) недостаточно для определения трех компонент напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} и двух компонент деформаций ε_{rr} и $\varepsilon_{\theta\theta}$. Для их определения применим дополнительно физические уравнения Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_{rr} - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_{\theta\theta} \right) + (1+\mu)dT \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_{rr} \right) + (1+\mu)dT \end{aligned} \quad (7)$$

где μ – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости I рода. Для определения пяти неизвестных имеем пять уравнений (5, 6, 7). Подставляя значения (7) в уравнение (6) и учитывая (1), запишем уравнение для определения радиальной компоненты напряжений:

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) = \frac{\alpha_T E}{1-\mu} \cdot \frac{dT}{dr} \quad (8)$$

где α_T – коэффициент термического расширения оболочки.

Так как величины нагрузки отсутствуют, то граничные условия можно записать:

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \text{при } r=a \text{ и } r=b \quad (9)$$

Решаем уравнение (8) при граничных условиях (9):

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha_T \cdot E}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_0^b T r dr - \int_a^r T r dr \right) \quad (10)$$

Окружную компоненту напряжений находим, решая совместно уравнения (5 и 6):

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha_T \cdot E}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right) \quad (11)$$

Зная компоненты σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$, осевую компоненту напряжений определяем по уравнению Гука:

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha_T E T + d, \quad (12)$$

Учитывая, что торцы оболочки свободны, то постоянную d находим из уравнения равновесия осевых сил на торцах, т.е.

$$\int_a^b \sigma_{zz} r dr = 0 \quad (13)$$

Анализируя уравнение (12) и (13), приходим к выводу, что основными компонентами, характеризующими напряженное состояние оболочки, являются радиальная компонента нормальных напряжений сжатия σ_{rr} и окружная составляющая $\sigma_{\theta\theta}$. Так как при $r=a$ и $r=b$ нормальная составляющая $\sigma_{rr} = 0$, то для оценки оболочек по трещиностойкости достаточно вычислить окружную составляющую $\sigma_{\theta\theta}$ и сопоставить ее величину с прочностью на сжатие материала оболочки в условиях максимального нагружения, т.е. при $T=T_{\text{контакта}}$, значение которой определяем на базе решения уравнения Фурье и интеграла ошибок Гаусса.

Для многослойной оболочки механизм напряженного состояния отличается от процесса распределения возникающих термических напряжений в однослойной оболочке.

При многослойности оболочки первый слой, получив термическую нагрузку, стремится расширяться, то последующий слой, препятствует этой деформации, способствует возникновению напряжения сжатия, в следующем слое возникают растягивающие напряжения. Затем при дальнейшем прогреве последующих слоев напряжения растягивания уменьшаются. Следовательно, растягивающие напряжения передаются от слоя к слою и максимального значения достигают на внешней поверхности. Максимальные напряжения сжатия при многослойной оболочке накапливаются на внутренней поверхности.

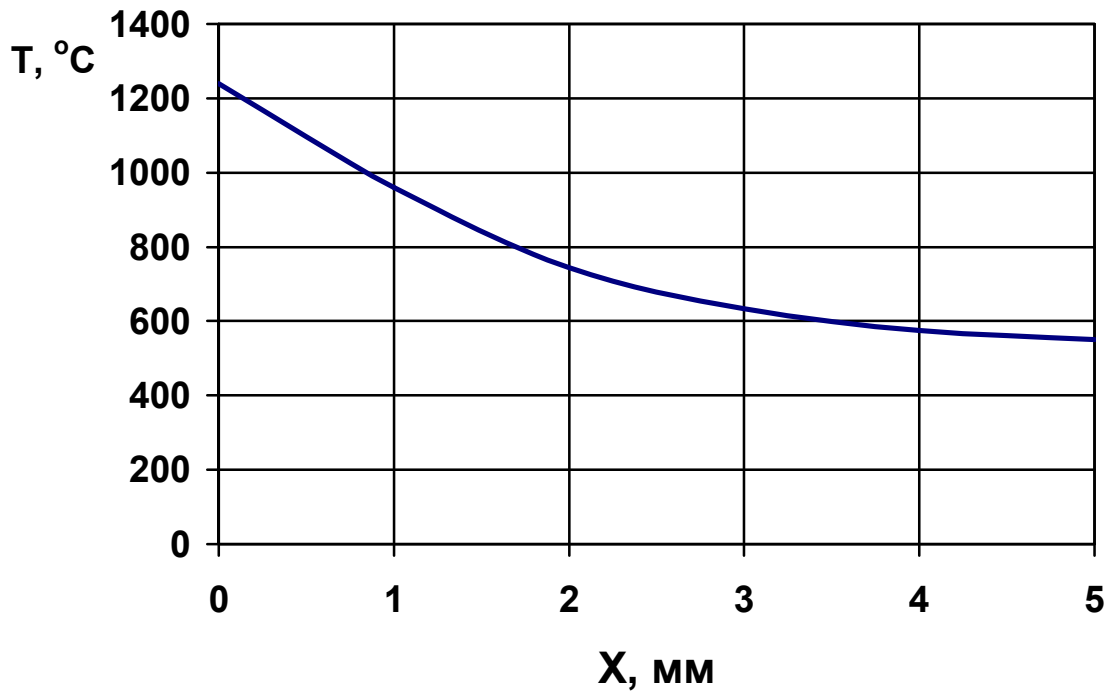
Для построения качественной картины распределения термических напряжений в многослойной оболочке и однослойной выполним расчеты необходимых величин и построим график.

При аналитическом расчете термонапряжений определяли значения термофизических коэффициентов по температурному полю оболочек. Вычисленные значения термонапряжений для исследуемых составов сопоставляли со значением прочности:

$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_B$ – оболочка обладает низкой трещиностойкостью

$\sigma_{\theta\theta} < \sigma_B$ – оболочка обладает высокой трещиностойкостью.

Температурное поле оболочки из форетической суспензии после термообработки и заливки расплава СЧ 32 при $\tau=10$ с представлено на рис. 2.



$$T_{\text{зал}}=1240^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{с}}=200^{\circ}\text{C}$$

Рис. 2. Температурное поле для однослойной оболочки

Зная показатель параболы температурного поля оболочки и температурный перепад в ее сечении, вычислили эффективное значение термофизических коэффициентов. Величины теплоаккумулирующей способности v_2 , теплоемкость c_2 , теплопроводность и температуропроводность a_2 , сопоставили для однослойных оболочек, полученных электрофизическим способом и шликерным формообразованием, в соответствии с исследуемыми.

Применяя полученные аналитические зависимости (10 - 12) для определения термических напряжений и вычисленные термофизические коэффициенты, строим график величин возникающих термических напряжений (рис. 3).

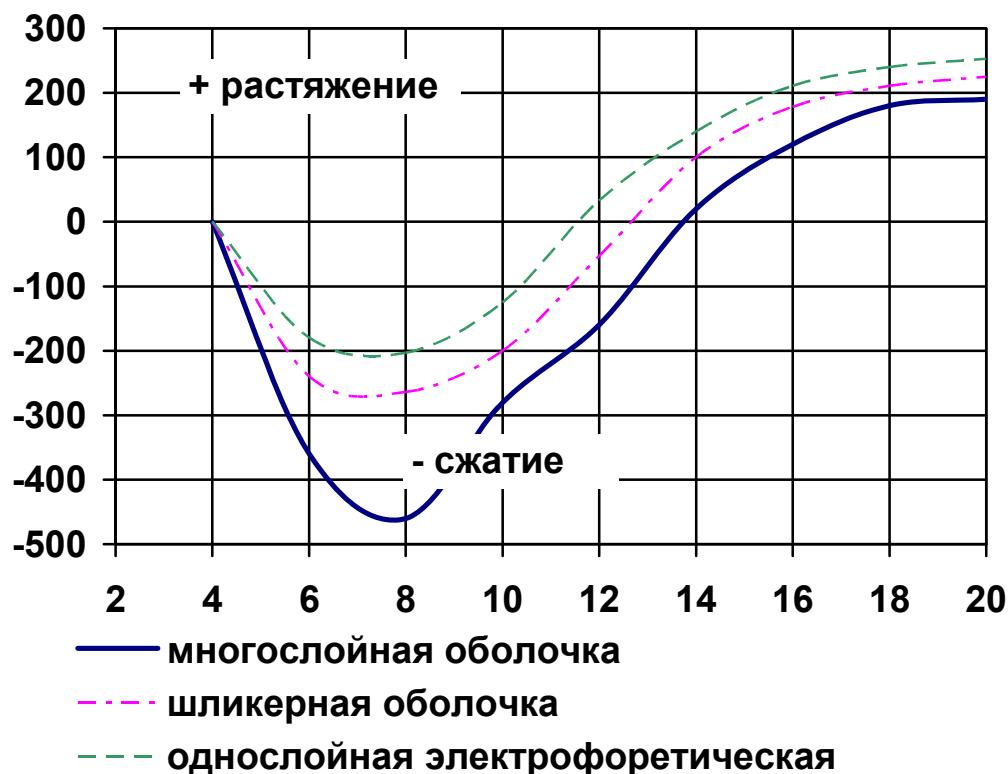


Рис. 3. Термические напряжения, возникающие в оболочках

Таким образом, технические решения обеспечивающие формирование однослойных оболочек при δ не более 6 мм обеспечивают высокую трещиностойкость. Для многослойных оболочек возникающие термические напряжения по сечению оболочки с угловой разнородной деформационной способностью облицовочных и опорных слоев создают неблагоприятные условия для трещиностойкости всей оболочки и вероятность появления брак в отливках повышается.

Рассмотренные технологические процессы позволяют обеспечить получение тонкорельефных поверхностей при художественном и ювелирном литье с высокой степенью точности (см. фото).

